EXAMEN GLOBAL DE ÁLGEBRA 19 – 3 – 03

IES GONZALO NAZARENO

1) Paco quiere hacer una gran fiesta e invitar a sus amigos a unas tortillas, así que va a la tienda y compra una docena de huevos, una bolsa de patatas y una botella de aceite. Dado el éxito obtenido, decide repetir la fiesta y vuelve a comprar una docena de huevos y dos botellas de aceite. Cuando llega a casa, se acuerda de que no tiene patatas. Vuelve a la tienda para comprar una bolsa de patatas y decide llevar también otra docena de huevos. En la primera ocasión gastó 6 €, en la segunda 6,5 € y en la última 3´5 €. Calcula, si es posible, el precio de los huevos, las patatas y el aceite.

(1´75 puntos)

2) Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3a-2 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 2a-1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a.

(1,75 puntos)

3) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$ y utilizando propiedades de los determinantes, calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$ (1´5 puntos)

4) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es cualquier número real.

a) Encuentra los valores de m para los que B· A tiene inversa.
b) Encuentra los valores para los que A· B tiene inversa.
c) Para m = - 1 halla la matriz inversa de A· B.

d) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado? Explícalo. (2,5 puntos)

5) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y+z=a+2 \\ x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=a+2 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores de a.
b) Resuélvelo para a = -2. (2,5 puntos)

SOLUCIONES

1) x = precio de una docena de huevos
y = precio de una bolsa de patatas
z = precio de una botella de aceite

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x \quad +2z=6{,}5 \\ x+y \quad =3{,}5 \end{cases} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 6{,}5 \\ 1 & 1 & 0 & 3{,}5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(A) = rg(A') = n^{o}\ incógnitas = 3$$

Sistema compatible determinado.

$$f_3 - f_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 6{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & -2{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{z = 2{,}5\ ;\ y = 2\ ;\ x = 1{,}5}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3a-2 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 2a-1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 6a + 2\ ;\ 4a^2 - 6a + 2 = 0 \rightarrow a = 1, a = \frac{1}{2}$$

a) Si a = 1 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & -3 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} f_3 = f_1 + f_2 \rightarrow \mathbf{rg(A) = 2}$

b) Si a = ½ $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & \mathbf{-3} & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} & \mathbf{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \mathbf{rg(A) = 3}$

c) Si $a \neq 1\ y\ a \neq \frac{1}{2}$ **rg(A)=3**

3)a)

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 2 = 30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} \underset{c_1 - 2c_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

Propiedades usadas:

A) Si a una fila o columna de una matriz se la multiplica por un número, el determinante de la nueva matriz es este número por el determinante de la matriz inicial.

B) Si a una fila o columna de una matriz se le suma una combinación lineal de las restantes filas o columnas de la matriz, el determinante no varía.

C) Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas, el determinante cambia de signo.

IES GONZALO NAZARENO

4)

a) $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & m-3\\ m & 2m & m^2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix};\begin{vmatrix}4 & -1 & m-3\\ m & 2m & m^2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=0\rightarrow$

La matriz **B A no tiene inversa** sea cual sea el valor de m.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 3+2m\\ 1-m & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1+2m & 3+2m\\ 1-m & 1\end{vmatrix}=2m^2+3m-2;$

$2m^2+3m-2=0\rightarrow m=-2, m=1/2.$

Si $\mathbf{m}\neq-\mathbf{2}$ **y** $\mathbf{m}\neq\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ A· B tiene inversa

c) Si m= -1 A· B$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3;(A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(Adjuntos(AB))^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

d) $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x+2y+mz=a\\ x-y-z=b\end{cases}$

Para que el sistema sea compatible determinado debe ocurrir que:
rg(A) = rg(A´) = nº incógnitas = 3, cosa que es **imposible** porque sólo hay dos ecuaciones y como máximo rg(A) = rg(A´) = 2.

5)

$\begin{cases}ax+y+z=a+2\\ x+ay+z=a+2\\ x+y+az=a+2\end{cases}\rightarrow A'=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & a+2\\ 1 & a & 1 & a+2\\ 1 & 1 & a & a+2\end{pmatrix};\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3-3a+2;\quad a^3-3a+2=0\rightarrow$

$a=1, a=-2$

a) Si $a\neq1\ y\ a\neq-2$ rg(a) = rg(A´) = nº incógnitas = 3 **Sistema compatible determinado (Solución única).**

b) Si a = 1 $\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ hay tres ecuaciones iguales, rg(A) = rg(A´) = 1,

nº incógnitas = 3 **Sistema compatible indeterminado(Infinitas soluciones)**.

c) a = -2 $A'=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix};\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\neq0$ rg(A) = rg(A´) = 2,

nº incógnitas = 3 **Sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones).**

$\begin{cases}-2x+y=-z\\ x-2y=-z\end{cases}\rightarrow x=z, y=z$ **Solución:** $(\mathbf{z},\mathbf{z},\mathbf{z})\forall\ \mathbf{z}\in\mathbf{R}$

IES GONZALO NAZARENO